

**Test intermédiaire de rhéologie (MSE-206)**  
**Mardi 13 mai 2025, 8h15-10h00 (durée 1h45)**

**Formulaire autorisé, pas d'autres documents**  
**Calculatrice scientifique autorisée**

**3 exercices indépendants – Répondez directement sur ce document**

*1 point de bonus pour la présentation (propreté, orthographe)*

**1. Microfluage d'un barreau de calibration (20 points/50)**

Un dispositif de calibration pour la visée d'un télescope inclus un petit barreau cylindrique qui pose un problème de fluage qu'il s'agit d'analyser. Le barreau a une longueur au repos de 2 mm et un diamètre de 1 mm. Des mesures par interférométrie donnent les résultats d'élongation  $\Delta$  du barreau en fonction du temps sous une charge de 2 N montrés à la Figure 1, et ces dernières sont modélisées avec l'équation suivante :

$$\Delta(t) = 5 - 4 \cdot \exp\{-0.5t\} \quad (\text{où } \Delta \text{ est en } \mu\text{m} \text{ et } t \text{ est en heures})$$

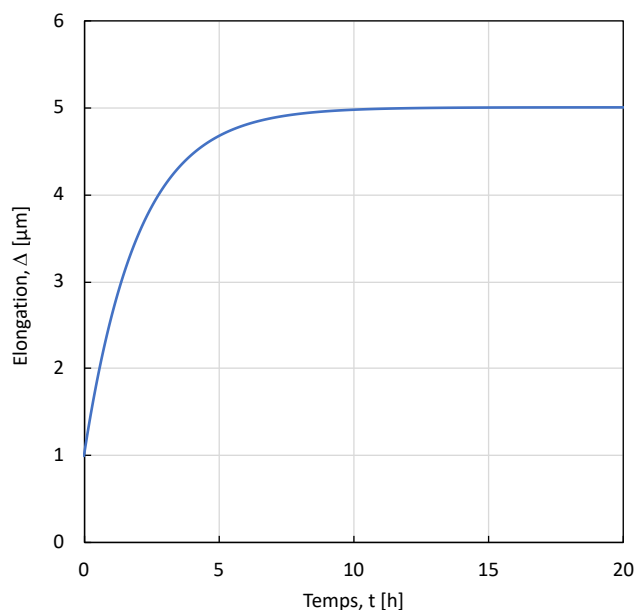


Figure 1. Élongation du barreau sous une charge de 2 N en fonction du temps.

- ② a) Comment pourriez-vous vérifier expérimentalement qu'il s'agit d'un matériau viscoélastique linéaire ?

Par définition, un matériau viscoélastique linéaire a sa fonction de complaisance  $J(t)$  (ou sa fonction de relaxation  $R(t)$ ) indépendante de la contrainte (ou de la déformation. Ici  $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 = (\Delta(t)/L_0)/(F/(\pi D^2/4))$  où  $L_0 = 2 \text{ mm}$ ,  $F = 2 \text{ N}$ ,  $D = 1 \text{ mm}$ . Pour le vérifier expérimentalement il suffit de tester le barreau sous une charge différente, 1 N par exemple.

- ④ b) En faisant l'hypothèse qu'il s'agit bien d'un matériau viscoélastique linéaire, quel modèle représente bien ce matériau ? Quelles sont les valeurs des paramètres du modèle ? Quelles sont les valeurs du module relaxé, et du temps de relaxation caractéristique de ce matériau ?

1 Il s'agit du modèle 'SCSM', avec une fonction de complaisance :

$$J(t) = \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_2} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\sigma}\right\}$$

$$1 \quad = \Delta(t) * \frac{\pi D^2}{4 L_0 F} = (5 - 4 \exp\{-0.5 t\}) \times \mathcal{L}$$

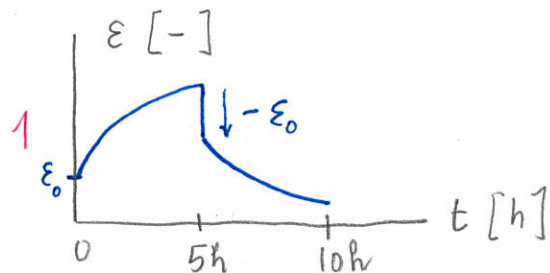
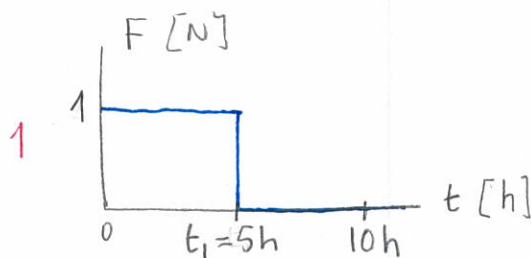
d'où  $E_R = 1/5 \mathcal{L}$

$$E_2 = 1/4 \mathcal{L} \quad \text{et} \quad E_1 = 1/\mathcal{L}$$

$$\tau_\sigma = 1/0.5 \quad \text{et} \quad \eta = \tau_\sigma E_2$$

2 Numériquement :  $E_1 = 5093 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = 1273 \text{ MPa}$ , ( $E_R = 1019 \text{ MPa}$ )  
 (0.5 pt / paramètre)  $\tau_\sigma = 2 \text{ h}$ ,  $\eta = 9167 \text{ GPa.s}$

- ⑥ c) Le barreau est maintenant soumis au temps  $t = 0$  à une charge plus faible de 1 N maintenue constante pendant 5 heures, puis la charge est retirée instantanément. Représentez graphiquement l'allure de la charge et de la déformation du barreau en fonction du temps. Calculez ensuite la déformation, et l'élongation correspondante aux temps  $t = 0$ ,  $t = 5 \text{ h}$  juste avant la décharge et juste après, et  $t = 10 \text{ h}$ .



La déformation  $\varepsilon(t)$  se calcule avec l'intégrale de Boltzmann :

$$0.5 \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$$

On distingue les intervalles où  $d\sigma/d\tau$  est constante :

1)  $t < 0$  :  $\sigma = 0$ ,  $d\sigma/d\tau = 0$  et  $\varepsilon = 0$

2)  $0 < t < t_1 = 5h$  : dans cet intervalle on a un échelon de contrainte  $\sigma_0 = F_0/(\pi D^2/4) = \text{constante}$ , et  $d\sigma/dt = 0$ . Dans ce cas on utilise la fonction de Dirac et on trouve :

1  $\varepsilon(t) = \sigma_0 \times J(t)$  où  $\sigma_0 = 1.273 \text{ MPa}$

0.5  $\rightarrow \text{à } t=0 : \varepsilon(0) = \sigma_0 \times \left[ \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_2} \times 1 \right] = \frac{\sigma_0}{E_1} = 2.50 \cdot 10^{-4}$   
 (il s'agit de la déformation élastique instantanée du SLSM,  $\varepsilon_0$ )  
 et donc  $\Delta(0) = \varepsilon(0) \times L_0 = 0.500 \mu\text{m}$

$\rightarrow \text{à } t=t_1^- : \varepsilon(t_1^-) = \sigma_0 \times \left[ \frac{1}{E_R} - \frac{1}{E_2} \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] = 1.168 \cdot 10^{-3}$   
 0.5 et  $\Delta(t_1^-) = 2.336 \mu\text{m}$

3)  $t \geq t_1$  : la charge est retirée donc  $\sigma = 0$  et  $d\sigma/dt = 0$ . Il s'agit d'une recouvrance de la déformation (équation donnée dans le formulaire) :

0.5  $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} \times \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] \times \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_\sigma}\right\}$

$\rightarrow \text{à } t=t_1^+ \text{ on a le retour élastique instantané du SLSM :}$

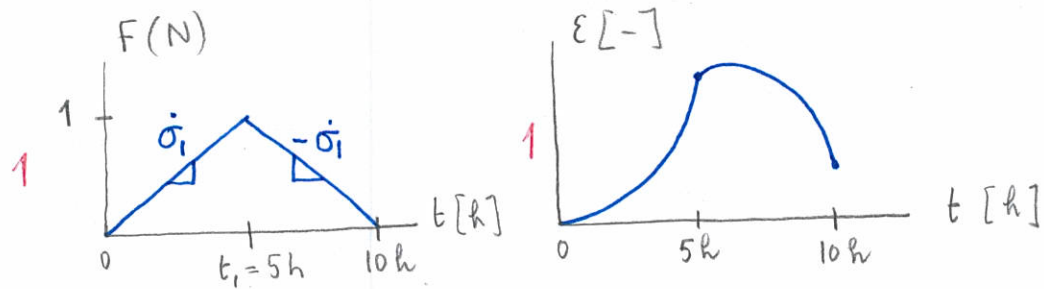
$\varepsilon(t_1^+) = \varepsilon(t_1^-) - \sigma_0/E_1 = 9.18 \cdot 10^{-4}$

0.5 et  $\Delta(t_1^+) = 1.836 \mu\text{m}$

$\rightarrow \text{à } t=2t_1 : \varepsilon(2t_1) = \frac{\sigma_0}{E_2} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] \times \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\}$   
 $= 7.54 \cdot 10^{-5}$

0.5 et  $\Delta(2t_1) = 0.151 \mu\text{m}$

- 6) d) Le barreau est finalement soumis à une charge qui augmente linéairement de 0 à 1 N en 5 heures, puis diminue linéairement jusqu'à 0 N en 5 heures également. Représentez graphiquement l'allure de la charge et de la déformation du barreau en fonction du temps. Calculez ensuite la déformation, et l'élongation correspondante aux temps  $t=0$ ,  $t=5h$  et  $t=10h$ .



On a toujours  $\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau$

1)  $t < 0$   $\sigma = 0$ ,  $d\sigma/d\tau = 0$ ,  $\epsilon = 0$

2)  $0 \leq t < t_1$  :  $\epsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}_1 d\tau$  où  $\dot{\sigma}_1 = \frac{F}{(\pi D^2/4)} \cdot \frac{1}{t_1} = 70.7 \text{ Pa/s}$

$$= \dot{\sigma}_1 \left[ \frac{\tau}{E_R} - \frac{\tau_\sigma}{E_2} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{\tau_\sigma}\right\} \right]_0^t$$

1  $= \dot{\sigma}_1 \left[ \frac{t}{E_R} - \frac{\tau_\sigma}{E_2} (1 - \exp\{-t/\tau_\sigma\}) \right]$

0.5 et  $\epsilon(0) = \dot{\sigma}_1 [0 - 0] = 0 = \Delta(0)$

0.5  $\epsilon(t_1) = \dot{\sigma}_1 \left[ \frac{t_1}{E_R} - \frac{\tau_\sigma}{E_2} (1 - \exp\{-t_1/\tau_\sigma\}) \right] = 8.83 \cdot 10^{-4}$

et  $\Delta(t_1) = 1.766 \mu\text{m}$

(notons qu'ici  $\epsilon(t_1^-) = \epsilon(t_1^+) = \epsilon(t_1)$  car il n'y a pas de chargement ou déchargement instantané)

1 3)  $t > t_1$  :  $\epsilon(t) = \dot{\sigma}_1 \int_0^{t_1} J(t-\tau) d\tau - \dot{\sigma}_1 \int_{t_1}^t J(t-\tau) d\tau$

$$= \dot{\sigma}_1 \left[ \left[ \frac{\tau}{E_R} - \frac{\tau_\sigma}{E_2} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{\tau_\sigma}\right\} \right]_0^{t_1} - \left[ \frac{\tau}{E_R} - \frac{\tau_\sigma}{E_2} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{\tau_\sigma}\right\} \right]_{t_1}^t \right]$$

$$\varepsilon(t) = \dot{\sigma}_1 \left[ \left[ \frac{t_1}{E_R} - \frac{\tau_0}{E_2} \left( \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_0}\right\} - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\} \right) \right] - \left[ \frac{t}{E_R} - \frac{t_1}{E_R} - \frac{\tau_0}{E_2} \left( 1 - \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_0}\right\} \right) \right] \right]$$

$$0.5 = \dot{\sigma}_1 \left[ \frac{2t_1 - t}{E_R} + \frac{\tau_0}{E_2} \left( 1 + \exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\} - 2 \exp\left\{-\frac{t-t_1}{\tau_0}\right\} \right) \right]$$

$$0.5 \text{ d'où } \varepsilon(2t_1) = \dot{\sigma}_1 \left[ \frac{t_0}{E_2} \left( 1 + \exp\left\{-\frac{2t_1}{\tau_0}\right\} - 2 \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_0}\right\} \right) \right] = 3.37 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{et } \Delta(2t_1) = 0.674 \mu\text{m}.$$

- ② e) Lequel des deux programmes c) et d) ci-dessus donne la déformation la plus petite ? Que proposeriez-vous pour diminuer davantage le fluage de ce petit barreau ? Quelques lignes suffisent.

0.5 Le programme d) avec chargement progressif donne en effet la déformation la plus petite (avec  $\Delta(t_1) = 1.766 \mu\text{m}$ , contre  $\Delta(t_1) = 2.336 \mu\text{m}$  pour le programme c) )

Le fluage est contrôlé d'une part par le matériau constituant le barreau, et d'autre part par le chargement auquel il est soumis. On pourrait donc jouer sur :

0.5 1) le matériau en cherchant à diminuer  $\dot{\sigma}(t)$  ;

0.5 2) la force appliquée, en la diminuant (ou en modifiant le chemin de chargement) ;

0.5 3) la géométrie du barreau pour diminuer la contrainte correspondant à la force appliquée.



## Problème 2 : Extraction de carottes glaciaires (20 points/50)

Vous avez accepté de rejoindre l'équipe de l'EPFL qui participe à l'Antarctic Circumnavigation Expedition (ACE) et partez extraire des échantillons cylindriques (des "carottes") de glace sur la banquise de l'Antarctique (Figure 2.1). L'équipe s'est munie d'un appareil pour prélever les carottes, appelé un carottier, dont le principe est montré à la Figure 2.2. Il s'agit d'un tube métallique de longueur  $L = 10$  m, de diamètre externe de 12 cm et d'épaisseur de 1 cm (les carottes de glace ont donc un diamètre de 10 cm). Ce tube comprend une tête de forage et il est attaché au bout d'un long câble enroulé sur un treuil. Une carotte de 3 mètres de longueur est forée. A chaque passe, tous les 3 m, le tube de 10 m du système carottier est treuillé à la surface, vidé de la carotte et des copeaux, puis renvoyé au fond.



Figure 2.1. Carotte de glace extraite à 3270 mètres de profondeur près du pôle Sud par la collaboration européenne Epica.

La tête de forage a un diamètre légèrement supérieur à celui du carottier, permettant d'utiliser un fluide de forage à base de kérosène, qui sert à contrebalancer la pression de la glace et évite au trou de se refermer. Le diamètre du trou creusé est égal à 12.2 cm, correspondant à une épaisseur du fluide, entre le carottier et la glace de 1 mm.

La masse à treuiller (carottier et carotte de glace) est d'environ 300 kg, soit une force d'environ 3000 N. Mais il faut ajouter à cette force une force due à la résistance visqueuse du fluide de forage. En effet, le tube est dans un trou qui contient le fluide de viscosité 12 Pa.s, et qui va donc exercer une résistance supplémentaire à l'extraction. Notons que le tube ne tourne pas, il est simplement retiré et se déplace parallèlement à l'axe du trou de forage.

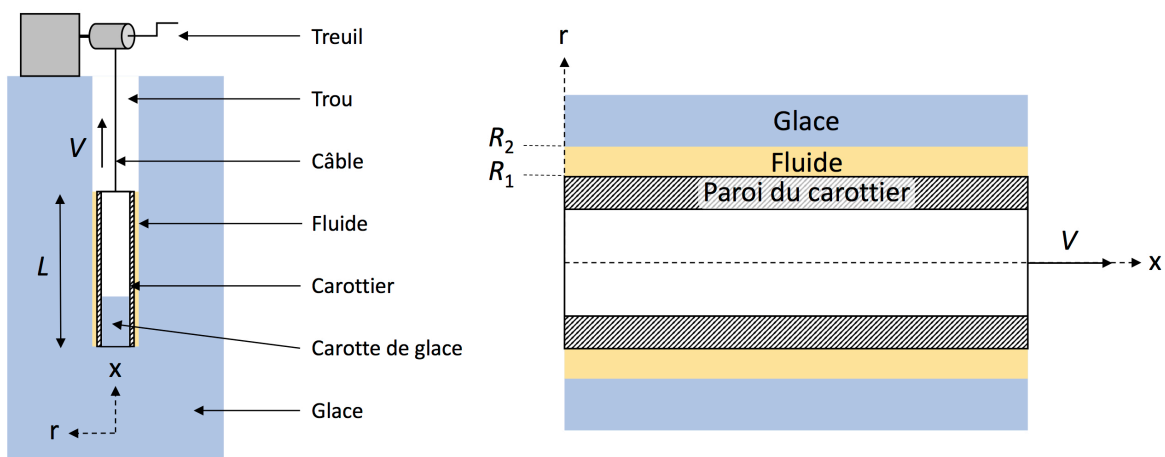


Figure 2.2. Principe de fonctionnement du carottier et géométrie du problème.

Pour trouver quelle est cette force supplémentaire, vous devez résoudre le problème suivant :

On suppose que le fluide est incompressible et Newtonien, et se trouve entre les deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Le cylindre intérieur est tiré à la vitesse constante  $V = 0.1$  m/s. On considère que le cylindre est très long dans la direction  $x$ , et que l'écoulement est stationnaire.

- 2 pts a) L'épaisseur du film formé par le fluide de forage étant petite par rapport au rayon du cylindre, commencez par trouver une approximation du taux de cisaillement et de la contrainte de cisaillement  $\tau_{rx}$ , puis calculez la force visqueuse  $F_v$  correspondante.

$$\tau_{rx} = \eta \dot{\gamma} = \eta \cdot \frac{V}{h} = 12 \cdot \frac{0.1}{0.001} = 1200 \text{ Pa}$$

$$\text{d'où } F_v = \tau_{rx} \cdot S = \tau_{rx} \cdot 2\pi R_1 L = 1200 \cdot 2\pi \cdot 0.06 \cdot 10 = 4524 \text{ N}$$

- 9 pts b) Ensuite, il vous faut résoudre le problème de façon plus précise, en tenant compte de la géométrie cylindrique du forage. Trouvez le profil des vitesses dans le fluide entre les cylindres. Pour cela, faites les hypothèses nécessaires sur l'équation de Navier-Stokes.

hypothèses pour résoudre NS : 3.5 pts (0.5 pt / hypothèse)

- a) fluide newtonien incompressible (dans l'énoncé)  $\partial u_x / \partial x = 0$
- b) Écoulement laminaire
- c) vitesse nulle à la paroi (C.L.)
- d) Écoulement stationnaire :  $\partial v_x / \partial t = 0$
- e) pas de forces externes :  $\rho f_x = 0$
- f) pression constante dans la section  $\partial p / \partial r = \partial p / \partial \theta = 0$   
(et pas de gradient de pression :  $\partial p / \partial x = 0$ )
- g) écoulement dans la direction  $x$  :  $u_r = u_\theta = 0$  ;  $\partial u_x / \partial \theta = 0$

$$\rightarrow \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right] = 0$$

5.5 pts pour le calcul

$$\text{d'où } \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow r \frac{\partial u_x}{\partial r} = C_1 \text{ constante}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$\rightarrow u_x(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$C.L. : u_x(R_1) = C_1 \ln R_1 + C_2 = V \quad (1)$$

$$u_x(R_2) = C_1 \ln R_2 + C_2 = 0 \quad (2)$$

---


$$(1) - (2) : C_1 \ln(R_1/R_2) = V$$

$$\rightarrow C_1 = V / \ln(R_1/R_2)$$

$$\text{et } C_2 = -C_1 \ln R_2$$

$$\text{d'où } u_x(r) = V \left( \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} \right)$$

3 pts c) Calculez la contrainte de cisaillement  $\tau_{rx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right)$  où  $u_x$  et  $u_r$  sont les composantes du champ de vitesse au sein du fluide.

$$\tau_{xr}(r) = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial u_x}{\partial r}$$

$$= \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( V \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)} \right) = \eta V \cdot \frac{1}{\ln(R_1/R_2)} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \ln(r/R_2)$$

$$= \frac{\eta V}{\ln(R_1/R_2)} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{r}$$

$$= \frac{\eta V}{r \ln(R_1/R_2)} \quad \begin{matrix} [\text{Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} / \text{m}] \\ = [\text{Pa}] \checkmark \end{matrix}$$

$$A.N. \quad \tau_{xr}(R_1) = \frac{10 \times 0.1}{0.06 \cdot \ln(0.06/0.061)} = 1210 \text{ Pa}$$

N.B. pour  $R_2 - R_1 = h \ll R_1, R_2$ ,

$$\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \ln\left(\frac{R_1 - R_2}{R_2} + 1\right) \approx \frac{R_1 - R_2}{R_2} = -\frac{h}{R_2}$$

$$\rightarrow \tau_{xr}(r) \approx \frac{\eta V}{h} \cdot \frac{R_2}{r} \quad \text{et donc pour } r = R_2 :$$

$$\tau_{xr}(R_2) = \frac{\eta V}{h} \quad \dots \text{ solution simple trouvée en a)}$$



- 2 pts d) Calculez la force de cisaillement  $F_v$  pour tirer les 10 m de tube à la même vitesse de 0.1 m/s. L'approximation calculée en a) était-elle satisfaisante et pourquoi ? Par ailleurs, qu'en concluez-vous sur la force totale de tirage du treuil ?

$$F_v = \tau_{rz} \cdot S = \tau_{rz} \cdot 2\pi r \cdot L$$

on prend  $r = R_1$

$$F_v = \frac{\eta V \cdot 2\pi R_1 L}{R_1 \ln(R_1/R_2)} = 4561 \text{ N}$$

→ Approximation a) très bonne (0.8% d'écart)

→  $F_v > F$  (carotte + carottier) !

- 4 pts e) Quelles solutions pourriez vous proposer à l'équipe ACE pour diminuer cette force visqueuse, concernant le fluide de forage ou le dimensionnement de l'opération de forage ?

Solutions 1) augmenter  $h$  ( $F \propto 1/h$ )

2) diminuer  $V$  ( $F \propto V$ )

3) diminuer  $\eta$  (fluide rhéo fluide) (faut)

4) diminuer  $L$  ( $F \propto L$ )

**Problème 3 : questions diverses (2 points/50 pour chaque question)**

- a) Pour un solide donné, si on vous donne des courbes de fluage (évolution de la déformation  $\varepsilon$  en fonction du temps  $t$ , pour un échantillon soumis à une contrainte  $\sigma_0$  constante) pour trois valeurs  $\sigma_0$  différentes, comment pouvez vous dire si le matériau est viscoélastique et quelle pourrait être sa loi de comportement  $\varepsilon(\sigma_0 ; t)$  ?

Le matériau est viscoélastique si la déformation dépend du temps (et viscoélastique linéaire si la déformation est proportionnelle à la contrainte  $\sigma_0$ , i.e., si le rapport  $\varepsilon(t)/\sigma_0$  qui est la complaisance de fluage  $J(t)$  est indépendante de  $\sigma_0$ ). Sa loi de comportement pourrait être celle du SLSM, ou tout autre loi donnant une croissance progressive de la déformation avec le temps.

- b) Quel est l'intérêt de faire une superposition temps-température pour un matériau viscoélastique ?

La superposition temps-température permet de prédire le comportement d'un solide viscoélastique (module, complaisance) pour des temps très longs (ou des fréquences très basses) et à n'importe quelle température à partir de tests de courte durée (ou à fréquence élevée) effectués à différentes températures.

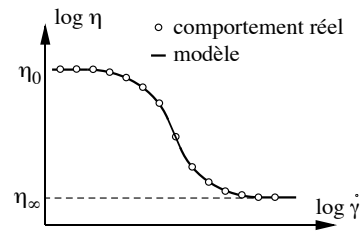
- c) Pour un fluide, quelle est la différence entre un comportement rhéofluidifiant et un comportement thixotrope ? Donnez un exemple de chacun de ces deux comportements.

Un fluide rhéofluidifiant a une viscosité qui diminue quand le taux de cisaillement augmente. Exemples : polymères fondus, ketchup.

Un fluide thixotrope a une viscosité qui diminue avec le temps, pour un taux de cisaillement constant. Exemples : yaourt, ciment.

- d) Représentez schématiquement le modèle de Carreau-Yashuda (donné dans le formulaire) et expliquez brièvement la signification de chaque paramètre.

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[ 1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^k \right]^{\frac{n-1}{k}}$$



- $\eta_0$  est la viscosité à un taux de cisaillement nul,
- $\eta_{\infty}$  est la viscosité à un taux de cisaillement infini,
- $\lambda_c$  est un temps de relaxation qui indique la transition entre le plateau Newtonien et le comportement de loi de puissance,
- $n$  est l'indice de pseudoplasticité,
- $k$  est un paramètre permettant une transition plus progressive entre les plateaux newtoniens et la région pseudoplastique ou rhéofluidifiante.

- e) Représentez schématiquement l'évolution de la viscosité  $\eta$  et du module de stockage  $G'$  d'une résine époxy lors de sa réticulation.

